602. 円系表面上ノ幾何

松村 宗治 (台北大)

(I) $P\,dt + Q\,d\tau = 0$, $P'dt + Q'd\tau = 0$ ハ共ニ測地的平行曲線トシ相異ナル系線ニ属スルモノトスル、然ル時ハ次ノ関係成立ス。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{HQ}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)Q^2-2(\theta_t\theta_\tau)PQ+(\theta_\tau\theta_\tau)P^2}}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{HP}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)Q^2-2(\theta_t\theta_\tau)PQ+(\theta_\tau\theta_\tau)P^2}}\right),$$

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{HQ'}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)Q'^2-2(\theta_t\theta_\tau)P'Q'+(\theta_\tau\theta_\tau)P'^2}}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{HP'}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)Q'^2-2(\theta_t\theta_\tau)P'Q'+(\theta_\tau\theta_\tau)P'^2}}\right)$$

コヽニ　$H=\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}$　デアル。

ツマリ (1) ナル條件アレバ

$$(2)\qquad P\,dt+Q\,d\tau=0,\quad P'dt+Q'd\tau=0$$

ナル二曲線ハ共ニ測地的平行曲線ニナルワケデアル。

以上 *Weatherburn: Differentialgeo.* I, P122 ヲ參照シタ，尚記号ニツイテハイツモノ通リデアル。

(2)ヲ一緒ニシテ表セバ

$$(3)\qquad PP'dt^2+(P'Q+PQ')\,dt\,d\tau+QQ'd\tau^2=0$$

トナルカラ上記ノ *Diff. Geo.* I, P.57 ヲ參照セバ (2)ナル二曲線ノ間ノ角 ψ ハ下ノ様ニナル。

$$(4)\qquad \tan\psi=\frac{H\sqrt{(P'Q+PQ')^2-4PP'QQ'}}{(\theta_t\theta_t)QQ'-(\theta_t\theta_\tau)(P'Q+PQ')+(\theta_\tau\theta_\tau)PP'}$$

ツマリ円系表面上ニ二ツノ測地的平行曲線(2)ヲ考ヘルト其ノ間ノ角 ψ ニ向ッテハ (4) ガ成立ツ、コヽニ (1) ガ成立スルノデアル。

(II) 三次元 *Euclid* 空間内ノ表面ノ第一基本量ヲ E, F,

G；第二基本量ヲL, M, Nトセバ

$$(1)\quad \frac{1}{R}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}$$

デアルコトハ人ノヨク知ル所デアル。

コヽニ $\frac{1}{R}$ ハ法曲率デアル。

サテ円系表面ニテハ吾人ノ基本量 $(\theta_u\theta_u)$, $(\theta_u\theta_v)$, $(\theta_v\theta_v)$ トE, F, Gノ間ニハ次ノ関係成立スル。

$$(2)\quad \lambda(u,v)E=(\theta_u\theta_u),\quad \lambda(u,v)F=(\theta_u\theta_v),$$
$$\lambda(u,v)G=(\theta_v\theta_v)$$

詳細ハ台北大，紀要第二巻第一号 P. 36ヲ参照セヨ。

サテ (1) ト (2) ヨリ

$$(3)\quad \lambda(u,v)=\frac{(\theta_u\theta_u)\,du^2+2(\theta_u\theta_v)\,du\,dv+(\theta_v\theta_v)\,dv^2}{R(L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2)}$$

デアル、サテ *Scheffers* ニヨレバ *Kurvennetz ohne Umwege* ハ

$$(4)\quad (E-\varphi_u^2)\,du^2+2(F-\varphi_u\varphi_v)\,du\,dv+(G-\varphi_v^2)\,dv^2=0$$

即チ

$$(5)\quad \left(\frac{(\theta_u\theta_u)}{\lambda(u,v)}-\varphi_u^2\right)du^2+2\left(\frac{(\theta_u\theta_v)}{\lambda(u,v)}-\varphi_u\varphi_v\right)du\,dv$$
$$+\left(\frac{(\theta_v\theta_v)}{\lambda(u,v)}-\varphi_v^2\right)dv^2=0$$

デアル、コヽニ(3)が成立ツ。サテ *Robinson* ノ論文(*Bulletin of the American Math. Society*, Vol. XLIII, P. 103) ニヨレバ

(6) $\lambda(u,v)\cdot(\phi_v f_u-\phi_u f_v)^2=(\theta_u\theta_u)\phi_v^2-2(\theta_u\theta_v)\phi_u\phi_v+(\theta_v\theta_v)\phi_v^2$

ハ曲線 $\phi=const.$ ガ距離函数 $f(u,v)$ ト関係ヲ有スル Kurvennetz ohne Umwege ノ一ツノ曲線デアル為ノ必要ニシテ十分ナル條件デアルコトニナル。コヽニ (3) ガ成立ツ。

尚 (3) ヲ考ニ入レテ (2) ヲ考フレバ P. Stauber ノ論文 (Jahresbericht der D. M. V, 47, S. 1—35) ヲバ円系曲線ニツイテイヘル。